В. А. ЗОРИЧ

ИНТЕГРАЛ

Ниже дано общее содержание темы Одномерный интеграл (Римана) и приведены записи раздела, относящегося к вопросам существования интеграла и описанию классов интегрируемых функций.

Содержание

2. Наблюдения над суммами Дарбу.
a) Геометрический смысл сумм Дарбу.
b) Поведение сумм Дарбу при продолжении разбиения.
c) Оценка изменения суммы Дарбу при добавлении точек разбиения.

3. Теорема Дарбу.
a) Существование пределов сумм Дарбу.
b) Верхние и нижние интегралы Дарбу, их геометрический смысл.

4. Критерий интегрируемости функции по Риману (в терминах сумм колебаний).

5. Примеры классов интегрируемых функций.
a) Непрерывные функции.
b) Монотонные функции.
c) Обсуждение возможного влияния точек разрыва.

6. Пространство функций, интегрируемых по Риману.

7. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману.
a) Определение множества меры нуль по Лебегу.
b) Примеры множеств меры нуль
(точка, конечное и счетное множество точек, конечное и счетное множество множеств меры нуль, объяснение того, что отрезок, отличный от точки, не есть множество меры нуль).
c) Свойство, выполненное «почти всюду».
d) Формулировка критерия Лебега.
e) Ещё раз о конкретных классах функций, интегрируемых по Риману. Интегрируемость функции Римана.

2. Наблюдения над суммами Дарбу.

a) *Геометрический смысл сумм Дарбу.*

Если на плоскости изобразить криволинейную трапецию, порожденную графиком функции f(пусть для простоты непрерывной и неотрицательной) на отрезке $[a, b]$, а каждый член $m_i\Delta x_i$ и $M_i\Delta x_i$ сумм Дарбу интерпретировать как площадь прямоугольника с основанием Δx_i, то нижняя сумма даст площадь вписанной в трапецию ступенчатой фигуры, а верхняя сумма — площадь описанной фигуры, составленной из соответствующих прямоугольников.

b) *Поведение сумм Дарбу при продолжении разбиения.*

Уже эта геометрическая интерпретация сумм Дарбу показывает, что при добавлении новой точки к уже имеющимся точкам разбиения нижняя сумма не может уменьшиться, а верхняя не может увеличиться.

Это, конечно, следует из того, что $\inf_E f(x) \leq \inf_{E'} f(x)$ и $\sup_{E'} f(x) \leq \sup_E f(x)$, если $E' \subset E$.

c) *Оценка изменения суммы Дарбу при добавлении точек разбиения.*

Оценим все же возможное изменение суммы Дарбу при добавлении конечного числа новых точек разбиения, например, в отрезок $[x_{i-1}, x_i]$. Этот отрезок окажется разбитым на подотрезки длины Δx_{ij}, причем $\Sigma_j \Delta x_{ij} = \Delta x_i$. Член $M_i\Delta x_i$ исходной, например, верхней суммы Дарбу при этом заменится на $\Sigma_j M_{ij}\Delta x_{ij}$.

Значит,

$0 \leq M_i\Delta_i - \Sigma_j M_{ij}\Delta x_{ij} = \Sigma_j(M_i - M_{ij})\Delta x_{ij} \leq \omega_i \Sigma_j \Delta x_{ij} = \omega_i \Delta_i$. где ω_i — колебание функции f на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$.

Аналогичные рассмотрения, разумеется, применимы и к нижней сумме Дарбу. Таким образом, при добавлении точек к разбиению суммы Дарбу могут измениться не более, чем на величину $\Omega\Delta$, где Ω — колебание функции f на отрезке $[a, b]$, а Δ — общая длина тех отрезков исходного разбиения, которые содержат добавленные точки.

3. Теорема Дарбу.

a) *Существование пределов сумм Дарбу.*

Покажем теперь, вслед за Дарбу, что *нижние и верхние суммы Дарбу имеют пределы (возможно не совпадающие), когда параметр разбиения стремится к нулю.*

Пусть $\overline{\int} := \inf_P S(f, P)$. Проверим, что $\overline{\int} = \lim_{\lambda(P)\to 0} S(f, P)$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется разбиение $\tilde{P}$ такое, что $\inf_P S(f, P) \leq S(f, \tilde{P}) < \inf_P S(f, P) + \varepsilon$.

Возьмем теперь любое разбиение P с параметром $\lambda(P) < \delta$, где δ так мало, что рассмотренная выше величина $\Omega\Delta$ будет меньше ε, где теперь Δ — общая длина отрезков разбиения P, которые содержат точки разбиения $\tilde{P}$ (в $\tilde{P}$ конечное число точек!).

Тогда получим следующие соотношения

$\inf_P S(f,P) \le S(f,P) < S(f,P\cup\tilde{P})+\varepsilon < S(f,\tilde{P})+\varepsilon < \inf_P S(f,P)+2\varepsilon$.

Но это и значит, что $\lim_{\lambda(P)\to 0} S(f,P) = \inf_P S(f,P)$.

Аналогично показываем, что

$\sup_P s(f,P) \ge s(f,P) > s(f,\tilde{P}) - \varepsilon > \inf_P S(f,P) - 2\varepsilon$

и, значит,

$\lim_{\lambda(P)\to 0} s(f,P) = \sup_P s(f,P)$.

b) *Верхний и нижний интегралы Дарбу, их геометрический смысл.*

Величины

$\underline{\int}_a^b f(x)dx := \lim_{\lambda(P)\to 0} s(f,P)$ и $\overline{\int}_a^b f(x)dx := \lim_{\lambda(P)\to 0} S(f,P)$

называются соответственно *нижним* и *верхним интегралом Дарбу* функции f на исходном отрезке $[a,b]$.

С точки зрения геометрической интерпретации, они дают верхнюю грань площадей вписанных в криволинейную трапецию ступенчатых фигур и нижнюю грань площадей таких же описанных фигур соответственно. При их совпадении мы приписываем криволинейной трапеции в качестве площади общее значение этих величин.

4. Критерий интегрируемости функции по Риману (в терминах сумм колебаний).

Из неравенств

$s(f,P) = \inf_\xi \sigma(f,P,\xi) \le \sigma(f,P,\xi) \le \sup_\xi \sigma(f,P,\xi) = S(f,P)$

с учетом теоремы Дарбу теперь следует, что для интегрируемости по Риману функции f на отрезке $[a,b]$ не только необходимо, но и достаточно чтобы

$$\underline{\int}_a^b f(x)dx = \overline{\int}_a^b f(x)dx \qquad (*)$$

или, что то же самое,

$$S(f,P) - s(f,P) = \Sigma_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda(P)\to 0. \qquad (**)$$

Поскольку

$s(f,P) \le \underline{\int}_a^b f(x)dx \le \overline{\int}_a^b f(x)dx \le S(f,P)$, то достаточно даже, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ нашлось такое разбиение P, для которого

$$S(f,P)-s(f,P)=\Sigma_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon. \qquad (***)$$

5. Примеры классов интегрируемых функций.

a) *Непрерывные функции.*

Непрерывная на отрезке функция интегрируема на нем.

Действительно, в силу равномерной непрерывности функции f на отрезке $[a,b]$, можно выбрать величину $\delta>0$ малой настолько, чтобы при $\lambda(P)<\delta$ колебание ω_i функции f на каждом отрезке $[x_{i-1},x_i]$ разбиения P было меньше $\varepsilon/(b-a)$. Тогда будет выполнено достаточное условие (***) интегрируемости.

b) *Монотонные функции.*

Пусть функция f ограничена и монотонна на отрезке $[a,b]$, например, не убывает на нем. Пусть $m=\inf_{[a,b]}$ иf $M=\sup_{[a,b]}f$. Из оценки $\Sigma_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\Sigma_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))\Delta x_i<\max_i\Delta x_i\Sigma_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1})<\lambda(P)(M-m)$ видно, что при $\lambda(P)<\varepsilon/(M-m)$ будет выполнено достаточное условие (***) интегрируемости.

Таким образом, любая ограниченная монотонная функция на отрезке интегрируема на нем. Заметим, что такая функция, как легко видеть, может иметь и бесконечно много точек разрыва.

c) *Обсуждение возможного влияния точек разрыва.*

Сопоставляя последние два примера применения критерия интегрируемости, можно заметить, что сумма $\Sigma_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i$ может быть малой либо за счет малости колебаний ω_i, что имеет место в окрестности точек непрерывности функции, либо за счет компенсирующей малости суммарной длины отрезков, покрывающих множества, где колебания заметны.

Именно это обстоятельство и обыгрывается в очень простом по форме и прозрачном по содержанию критерии Лебега интегрируемости функции по Риману, который мы приведем ниже.

6. Пространство функций, интегрируемых по Риману.

Воспользуемся доказанным критерием интегрируемости (**), чтобы получить несколько полезных аппаратных следствий.

Пусть, как и прежде, $\mathcal{R}[a,b]$ — множество вещественнозначных функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a,b]$.

Пусть $f,g\in\mathcal{R}[a,b]$. Проверим тогда следующие утверждения:

a) $(f+g)\in\mathcal{R}[a,b]$, $\quad(\alpha f)\in\mathcal{R}[a,b]\quad$ и $\quad(\alpha f+\beta g)\in\mathcal{R}[a,b]$.

Таким образом, $\mathcal{R}[a,b]$ оказывается линейным пространством.

С учетом критерия (**) это следует из очевидных неравенств $\omega_i(f+g)\le\omega_i(f)+\omega_i(g)$ и $|\lambda|\omega_i(f)$.

b) $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$.

С учетом критерия (**) это следует из того, что $\omega_i(|f|) \leq \omega_i(f)$.

c) $\max\{f+g\} \in \mathcal{R}[a,b]$.

С учетом a) и b) это следует из равенства
$\max\{f+g\} = 1/2((f+g)+|f-g|)$.

d) $f^2 \in \mathcal{R}[a,b]$.

Поскольку $f \in \mathcal{R}[a,b]$, функция f ограничена на отрезке $[a,b]$. Если $C = \sup_{[ab]} |f(x)|$, то из $f^2(x') - f^2(x^{''}) = (f(x') - f(x^{''}))(f(x') + f(x^{''}))$ получаем, что $\omega_i(f^2) \leq 2C\omega_i(f)$. Остается сослаться на критерий (**).

e) $(f \cdot g) \in \mathcal{R}[a,b]$.

В самом деле, ведь a) $(f \cdot g) = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$, поэтому утверждение вытекает из доказанного в a) и d).

Заметим, что композиция интегрируемых функций, вообще говоря, не обязана быть интегрируемой функцией.

Например, композиция $g \circ f$ функций $g(y) = |\operatorname{sgn}(y)|$ и $f(x) = \mathcal{R}(x)$, где $\mathcal{R}(x)$ — функция Римана, дает функцию Дирихле $\mathcal{D}(x)$, которая не интегрируема по Риману ни на каком невырожденном отрезке, что, конечно, тоже видно из того же критерия (**).